

# Lugares Geométricos

## Ejercicio nº 1.-

Halla el lugar geométrico de los puntos,  $P$ , del plano tales que su distancia a  $Q(2, 4)$  sea igual a 3. ¿De qué figura se trata?

## Ejercicio nº 2.-

Obtén la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos  $A(2, 3)$  y  $B(4, 1)$ .

## Ejercicio nº 3.-

¿Cuál es el lugar geométrico cuya suma de distancias a los puntos  $A(0, 1)$  y  $B(0, -1)$  es 4?. Halla su ecuación.

## Ejercicio nº 4.-

Identifica y halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos,  $P$ , del plano tales que su distancia a la recta  $r_1: x + y + 1 = 0$  sea igual que su distancia a la recta  $r_2: 2x + 2y + 4 = 0$ .

## Ejercicio nº 5.-

Halla la ecuación de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas  $r_1: x + 3y - 1 = 0$  y  $r_2: 3x - y + 4 = 0$ .

## Ejercicio nº 6.-

Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos,  $P$ , del plano tales que su distancia al punto  $A(1, 0)$ , es el triple de su distancia a la recta  $x = 2$ . Identifica la figura que obtienes.

## Ejercicio nº 7.-

Halla el lugar geométrico de los puntos,  $P$ , del plano cuya distancia a  $A(2, 0)$  sea el doble de la distancia a  $B(-1, 0)$ . Identifica la figura resultante.

## Ejercicio nº 8.-

Halla el lugar geométrico de los puntos del plano,  $P(x, y)$ , tales que el triángulo  $ABP$  sea rectángulo en  $P$ , siendo  $A(2, 1)$  y  $B(-6, 1)$ . Interpreta la figura que obtienes.

## Ejercicio nº 9.-

Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos  $A(-4, 0)$  y  $B(4, 0)$  es 40. Identifica la figura resultante.

**Ejercicio nº 10.-**

Obtén el lugar geométrico de los puntos,  $P$ , del plano tales que:

$$\frac{\text{dist}(P, A)}{\text{dist}(P, r)} = 2, \text{ siendo } A(1,0) \text{ y } r: y = 4$$

¿Qué figura obtienes?

## **Circunferencia**

**Ejercicio nº 11.-**

Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos  $A(-1, 2)$  y  $B(1, 4)$  y tiene su centro en la recta  $y = 2x$ .

**Ejercicio nº 12.-**

Halla la ecuación de la circunferencia tangente a la recta  $4x + 3y - 25 = 0$  y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas  $3x - y - 7 = 0$  y  $2x + 3y - 1 = 0$ .

**Ejercicio nº 13.-**

Escribe la ecuación de la circunferencia con centro en el punto  $(2, -3)$  y que es tangente a la recta  $3x - 4y + 5 = 0$ .

**Ejercicio nº 14.-**

Obtén la ecuación de la circunferencia de radio 2 que pasa por los puntos  $(1, 0)$  y  $(3, 2)$ .

**Ejercicio nº 15.-**

a) Halla el centro y el radio de la circunferencia de ecuación:

$$2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y + 8 = 0$$

b) Escribe la ecuación de la circunferencia de radio 5, que es concéntrica a la del apartado anterior.

**Ejercicio nº 16.-**

Halla la posición relativa de la recta  $r: x + y = 2$  con respecto a la circunferencia  $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$

**Ejercicio nº 17.-**

Estudia la posición relativa de la recta  $y = \frac{8-4x}{3}$  y la circunferencia  $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 20 = 0$ .

**Ejercicio nº 18.-**

Halla la posición relativa de la recta  $3x + 4y - 25 = 0$  con respecto a la circunferencia  $x^2 + y^2 - 25 = 0$ . Si se cortan en algún punto, halla sus coordenadas.

**Ejercicio nº 19.-**

Estudia la posición relativa de la recta  $r: 2x + y = 1$  y la circunferencia  $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ .

**Ejercicio nº 20.-**

Obtén el valor de  $k$  para que la recta  $s: x + y + k = 0$  sea tangente a la circunferencia  $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$ .

## Cónicas

**Ejercicio nº 21.-**

Identifica estas cónicas, halla sus elementos y dibújalas:

a)  $\frac{x^2}{36} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$       b)  $y^2 - 4x = 0$

**Ejercicio nº 22.-**

Describe las siguientes cónicas, obtén sus elementos y represéntalas:

a)  $4x^2 + 25y^2 = 100$       b)  $4y^2 - x^2 = 4$

**Ejercicio nº 23.-**

Identifica las siguientes cónicas, dibújalas y halla sus focos y su excentricidad:

a)  $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$       b)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1$

**Ejercicio nº 24.-**

Dadas las siguientes cónicas, identifícalas, obtén sus elementos característicos y represéntalas gráficamente:

a)  $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$       b)  $y^2 - 9x^2 = 9$

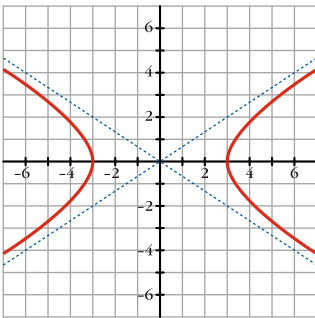
**Ejercicio nº 25.-**

Halla los elementos característicos de las siguientes cónicas, descríbelas y represéntalas gráficamente:

a)  $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$       b)  $25x^2 + 100y^2 = 2500$

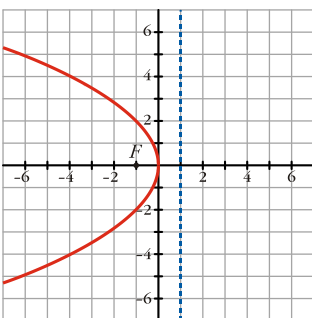
**Ejercicio nº 26.-**

Escribe la ecuación de la siguiente hipérbola y halla sus semieje, sus focos, su excentricidad y sus asíntotas:



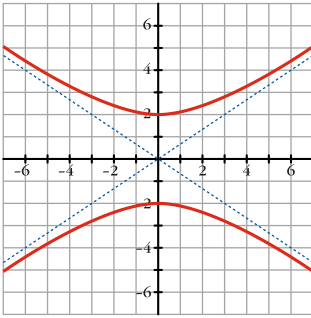
**Ejercicio nº 27.-**

Halla el foco, la directriz y la ecuación de la siguiente parábola:



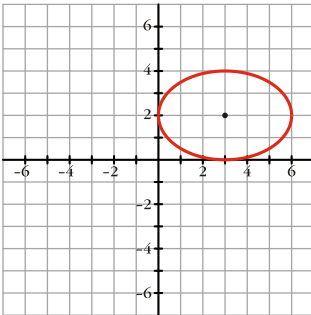
**Ejercicio nº 28.**

Pon la ecuación de la siguiente hipérbola, su semieje, sus focos, su excentricidad y sus asíntotas:



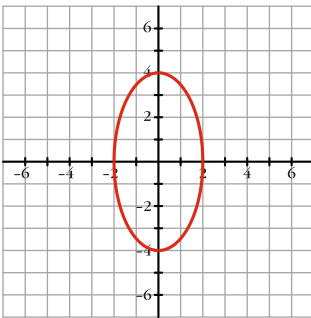
**Ejercicio nº 29.-**

Escribe la ecuación de la siguiente elipse y halla sus semiejes, sus focos y su excentricidad:



**Ejercicio nº 30.-**

Halla los semiejes, los focos y la excentricidad de la siguiente elipse. Escribe su ecuación:



# Soluciones ejercicios de Lugares Geométricos

## Ejercicio nº 1.-

Halla el lugar geométrico de los puntos,  $P$ , del plano tales que su distancia a  $Q(2, 4)$  sea igual a 3. ¿De qué figura se trata?

### **Solución:**

Es una circunferencia de centro  $(2, 4)$  y radio 3. Hallamos su ecuación:  
Si  $P(x, y)$  es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$dist(P, Q) = 3$ , es decir:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = 3. \text{ Elevamos al cuadrado y operamos:}$$

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$$

## Ejercicio nº 2.-

Obtén la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos  $A(2, 3)$  y  $B(4, 1)$ .

### **Solución:**

Los puntos  $P(x, y)$  de la mediatriz cumplen que:

$dist(P, A) = dist(P, B)$ , es decir:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2}$$

Elevamos al cuadrado en los dos miembros y operamos:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 &= x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 \\ 4x - 4y - 4 &= 0 \rightarrow x - y - 1 = 0 \end{aligned}$$

Es una recta perpendicular al segmento  $AB$ , que pasa por su punto medio.

## Ejercicio nº 3.-

¿Cuál es el lugar geométrico cuya suma de distancias a los puntos  $A(0, 1)$  y  $B(0, -1)$  es 4?. Halla su ecuación.

### **Solución:**

Es una elipse de focos  $A$  y  $B$  y constante  $k = 4$ . Hallamos su ecuación:

Si  $P(x, y)$  es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$dist(P, A) + dist(P, B) = 4$ , es decir:

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 4$$

Elevamos al cuadrado y operamos para simplificar:

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 4 - \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 16 + x^2 + (y+1)^2 - 8\sqrt{x^2 + (y+1)^2}$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 16 + x^2 + y^2 + 2y + 1 - 8\sqrt{x^2 + (y+1)^2}$$

$$8\sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 4y + 16$$

$$2\sqrt{x^2 + (y+1)^2} = y + 4$$

$$4(x^2 + y^2 + 2y + 1) = (y + 4)^2$$

$$4x^2 + 4y^2 + 8y + 4 = y^2 + 8y + 16$$

$$4x^2 + 3y^2 = 12. \text{ Dividimos entre 12:}$$

$$\frac{4x^2}{12} + \frac{3y^2}{12} = \frac{12}{12} \rightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1. \text{ Es una elipse.}$$

#### Ejercicio nº 4.-

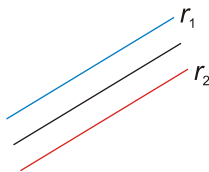
Identifica y halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos,  $P$ , del plano tales que su distancia a la recta  $r_1: x + y + 1 = 0$  sea igual que su distancia a la recta  $r_2: 2x + 2y + 4 = 0$ .

#### **Solución:**

Las dos rectas dadas,

$$r_1: x + y + 1 = 0 \text{ y } r_2: x + y + 2 = 0,$$

son rectas paralelas. Por tanto, el lugar geométrico pedido será otra recta, paralela a las dos, a igual distancia de ellas:



Hallamos su ecuación:

Si  $P(x, y)$  es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$dist(P, r_1) = dist(P, r_2)$ , es decir:

$$\frac{|x + y + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|x + y + 2|}{\sqrt{2}}$$

$$|x + y + 1| = |x + y + 2| \begin{cases} x + y + 1 = x + y + 2 \rightarrow 1 = 2 \rightarrow \text{Imposible} \\ x + y + 1 = -x - y - 2 \rightarrow 2x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

Observamos que la recta obtenida es paralela a  $r_1$  y  $r_2$ .

### Ejercicio nº 5.-

Halla la ecuación de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas

$$r_1: x + 3y - 1 = 0 \text{ y } r_2: 3x - y + 4 = 0.$$

**Solución:**

Los puntos  $P(x, y)$  de las bisectrices cumplen que:

$dist(P, r_1) = dist(P, r_2)$ , es decir:

$$\frac{|x + 3y - 1|}{\sqrt{10}} = \frac{|3x - y + 4|}{\sqrt{10}}$$

$$|x + 3y - 1| = |3x - y + 4| \begin{cases} \rightarrow x + 3y - 1 = 3x - y + 4 \rightarrow 2x - 4y + 5 = 0 \\ \rightarrow x + 3y - 1 = -3x + y - 4 \rightarrow 4x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

Son dos rectas perpendiculares entre sí, que se cortan en el mismo punto que  $r_1$  y  $r_2$ .

### Ejercicio nº 6.-

Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos,  $P$ , del plano tales que su distancia al punto  $A(1, 0)$ , es el triple de su distancia a la recta  $x = 2$ . Identifica la figura que obtienes.

**Solución:**

Si  $P(x, y)$  es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$dist(P, A) = 3 \cdot dist(P, x = 2)$ , es decir:

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 3|x-2|. \text{ Elevamos al cuadrado y operamos:}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 9(x^2 - 4x + 4)$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 9x^2 - 36x + 36$$

$$8x^2 - y^2 - 34x + 35 = 0. \text{ Es una hipérbola}$$

### Ejercicio nº 7.-

Halla el lugar geométrico de los puntos,  $P$ , del plano cuya distancia a  $A(2, 0)$  sea el doble de la distancia a  $B(-1, 0)$ . Identifica la figura resultante.

**Solución:**

Si  $P(x, y)$  es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$dist(P, A) = 2 \cdot dist(P, B)$ , es decir:

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2}. \text{ Elevamos al cuadrado y operamos:}$$



$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4(x^2 + 2x + 1 + y^2)$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4x^2 + 8x + 4 + 4y^2$$

$$3x^2 + 3y^2 + 12x = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x = 0$$

$(x+2)^2 + y^2 = 4$  . Es una circunferencia de centro  $(-2, 0)$  y radio 2.

### **Ejercicio nº 8.-**

Halla el lugar geométrico de los puntos del plano,  $P(x, y)$ , tales que el triángulo  $ABP$  sea rectángulo en  $P$ , siendo  $A(2, 1)$  y  $B(-6, 1)$ . Interpreta la figura que obtienes.

#### **Solución:**

Para que el triángulo sea rectángulo en  $P$ , se ha de cumplir que:

$$\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB} \Rightarrow \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \Rightarrow (2-x, 1-y) \cdot (-6-x, 1-y) = 0$$

$$(2-x)(-6-x) + (1-y)^2 = 0$$

$$-12 - 2x + 6x + x^2 + 1 + y^2 - 2y = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0; \text{ es decir:}$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$$

Obtenemos una circunferencia de centro  $(-2, 1)$  (que es el punto medio del segmento  $AB$ ) y de radio 4.

### **Ejercicio nº 9.-**

Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos  $A(-4, 0)$  y  $B(4, 0)$  es 40. Identifica la figura resultante.

#### **Solución:**

Si  $P(x, y)$  es un punto del lugar geométrico, ha de tenerse que:

$$[dist(P, A)]^2 + [dist(P, B)]^2 = 40; \text{ es decir:}$$

$$(x+4)^2 + y^2 + (x-4)^2 + y^2 = 40$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 + x^2 - 8x + 16 + y^2 = 40$$

$$2x^2 + 2y^2 = 8$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

Obtenemos una circunferencia de centro  $(0, 0)$  y radio 2.

### Ejercicio nº 10.-

Obtén el lugar geométrico de los puntos,  $P$ , del plano tales que:

$$\frac{\text{dist}(P, A)}{\text{dist}(P, r)} = 2, \text{ siendo } A(1,0) \text{ y } r: y = 4$$

¿Qué figura obtienes?

**Solución:**

Si  $P(x, y)$  es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$$\frac{\text{dist}(P, A)}{\text{dist}(P, r)} = 2, \text{ es decir: } \text{dist}(P, A) = 2 \cdot \text{dist}(P, r)$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2 \cdot |y-4|. \text{ Elevamos al cuadrado y operamos:}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4(y^2 - 8y + 16)$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4y^2 - 32y + 64$$

$$x^2 - 3y^2 - 2x + 32y - 63 = 0. \text{ Es una hipérbola}$$

## Circunferencia

### Ejercicio nº 11.-

Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos  $A(-1, 2)$  y  $B(1, 4)$  y tiene su centro en la recta  $y = 2x$ .

**Solución:**

Si tiene su centro en la recta  $y = 2x$ , las coordenadas de este son  $C(x, 2x)$ .

La distancia de  $A$  al centro ha de ser igual que la distancia de  $B$  al centro (esta distancia es el radio de la circunferencia):

$$\text{dist}(A, C) = \text{dist}(B, C)$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + (2x-2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (2x-4)^2}$$

$$x^2 + 2x + 1 + 4x^2 - 8x + 4 = x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 16x + 16$$

$$12x = 12 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = 2$$

El centro de la circunferencia es  $C(1, 2)$ .

$$\text{El radio es: } r = \text{dist}(A, C) = \sqrt{4} = 2$$

La ecuación será:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$

### Ejercicio nº 12.-

Halla la ecuación de la circunferencia tangente a la recta  $4x + 3y - 25 = 0$  y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas  $3x - y - 7 = 0$  y  $2x + 3y - 1 = 0$ .

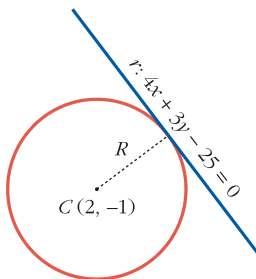
**Solución:**

Hallamos su centro:

$$\left. \begin{array}{l} 3x - y - 7 = 0 \\ 2x + 3y - 1 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = 3x - 7 \\ 2x + 3(3x - 7) - 1 = 0 \end{array}$$

$$2x + 9x - 21 - 1 = 0 \rightarrow 11x = 22 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = -1$$

El centro es  $C(2, -1)$ .



El radio,  $R$ , es igual a la distancia del centro a la recta tangente:

$$R = \text{dist}(C, r) = \frac{|8 - 3 - 25|}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$$

La ecuación será:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$$

### Ejercicio nº 13.-

Escribe la ecuación de la circunferencia con centro en el punto  $(2, -3)$  y que es tangente a la recta  $3x - 4y + 5 = 0$ .

**Solución:**

El radio,  $R$ , de la circunferencia es igual a la distancia del centro a la recta dada:

$$R = \text{dist}(C, r) = \frac{|6 + 12 + 5|}{\sqrt{25}} = \frac{23}{5}$$

La ecuación será:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = \frac{529}{25} \rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y - \frac{204}{25} = 0$$

$$25x^2 + 25y^2 - 100x + 150y - 204 = 0$$

### Ejercicio nº 14.-

Obtén la ecuación de la circunferencia de radio 2 que pasa por los puntos  $(1, 0)$  y  $(3, 2)$ .

#### **Solución:**

El centro de la circunferencia pertenece a la mediatriz del segmento de extremos  $A(1, 0)$  y  $B(3, 2)$ :

– Puntomediodel segmento  $A$  y  $B \rightarrow M = \left( \frac{1+3}{2}, \frac{0+2}{2} \right) = (2, 1)$

– Pendentedelarecta quepasa por  $A$  y  $B \rightarrow m = \frac{2-0}{3-1} = \frac{2}{2} = 1$

– Pendentedelamediatriz(perpendicular)  $\rightarrow \frac{-1}{m} = \frac{-1}{1} = -1$

– Ecuación de la mediatriz:

$$y = 1 - 1(x - 2) \rightarrow y = 1 - x + 2 \rightarrow y = 3 - x$$

Las coordenadas del centro de la circunferencia son  $C(x, 3 - x)$ .

La distancia del centro a los puntos  $A$  y  $B$  debe ser igual a 2:

$$\text{dist}(A, C) = \sqrt{(x-1)^2 + (3-x)^2} = 2$$

$$x^2 - 2x + 1 + 9 - 6x + x^2 = 4 \rightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x=3 \rightarrow y=0 \\ x=1 \rightarrow y=2 \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

- Centro  $(3, 0)$  y radio 2:

$$(x-3)^2 + y^2 = 4 \rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$$

- Centro  $(1, 2)$  y radio 2:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$

### Ejercicio nº 15.-

a) Halla el centro y el radio de la circunferencia de ecuación:

$$2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y + 8 = 0$$

b) Escribe la ecuación de la circunferencia de radio 5, que es concéntrica a la del apartado anterior.

#### **Solución:**

a)  $2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y + 8 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$

$$\text{Centro} = \left( \frac{4}{2}, \frac{6}{2} \right) = (2, 3)$$

$$\text{Radio} = \sqrt{4+9-4} = \sqrt{9} = 3$$

b) La circunferencia tiene radio 5 y centro (2, 3). Su ecuación será:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

**Ejercicio nº 16.-**

Halla la posición relativa de la recta  $r: x + y = 2$  con respecto a la circunferencia  $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$

**Solución:**

- Hallamos el centro y el radio de la circunferencia:

$$\text{Centro} = C = \left( \frac{-2}{2}, \frac{-4}{2} \right) = (-1, -2)$$

$$\text{Radio} = R = \sqrt{1+4-1} = \sqrt{4} = 2$$

- Hallamos la distancia del centro a la recta dada:

$$\text{dist}(C, r) = \frac{|-1-2-2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3,53 > 2 = \text{radio}$$

Por tanto, la recta es exterior a la circunferencia.

**Ejercicio nº 17.-**

Estudia la posición relativa de la recta  $y = \frac{8-4x}{3}$  y la circunferencia  $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 20 = 0$ .

**Solución:**

- Hallamos el centro y el radio de la circunferencia:

$$\text{Centro} = C = \left( \frac{12}{2}, \frac{6}{2} \right) = (6, 3)$$

$$\text{Radio} = r = \sqrt{36+9-20} = \sqrt{25} = 5$$

- Hallamos la distancia del centro a la recta dada:

$$s: y = \frac{8-4x}{3} \rightarrow 3y = 8-4x \rightarrow 4x+3y-8=0$$

$$\text{dist}(C, s) = \frac{|24+9-8|}{\sqrt{25}} = \frac{25}{5} = 5 = \text{radio}$$

- Como la distancia del centro a la recta es igual al radio, la recta es tangente a la circunferencia.

**Ejercicio nº 18.-**

Halla la posición relativa de la recta  $3x + 4y - 25 = 0$  con respecto a la circunferencia  $x^2 + y^2 - 25 = 0$ . Si se cortan en algún punto, halla sus coordenadas.

**Solución:**

Como tenemos que hallar los posibles puntos de corte, resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ 3x + 4y - 25 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = \frac{25 - 3x}{4} \\ x^2 + \left(\frac{25 - 3x}{4}\right)^2 - 25 = 0 \end{array}$$

$$x^2 + \frac{625 - 150x + 9x^2}{16} - 25 = 0 \rightarrow 16x^2 + 625 - 150x + 9x^2 - 400 = 0 \rightarrow$$

Se cortan en el punto (3, 4). Por tanto, son tangentes.

**Ejercicio nº 19.-**

Estudia la posición relativa de la recta  $r: 2x + y = 1$  y la circunferencia  $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ .

**Solución:**

- Hallamos el centro y el radio de la circunferencia:

$$\text{Centro} = C = \left(\frac{4}{2}, \frac{2}{2}\right) = (2, 1)$$

$$\text{Radio} = R = \sqrt{4 + 1 - (-4)} = \sqrt{9} = 3$$

- Hallamos la distancia del centro a la recta dada:

$$\text{dist}(C, r) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 - 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \approx 1,79 < 3 = \text{radio}$$

Por tanto, la circunferencia y la recta son secantes. Se cortan en dos puntos.

**Ejercicio nº 20.-**

Obtén el valor de  $k$  para que la recta  $s: x + y + k = 0$  sea tangente a la circunferencia  $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$ .

**Solución:**

- Hallamos el centro y el radio de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$$

$$\text{Centro} = C = \left( \frac{-6}{2}, \frac{-2}{2} \right) = (-3, -1)$$

$$\text{Radio} = r = \sqrt{9+1-6} = \sqrt{4} = 2$$

- Hallamos la distancia del centro a la recta dada:

$$\text{dist}(C, s) = \frac{|-3-1+k|}{\sqrt{2}} = \frac{|k-4|}{\sqrt{2}}$$

- Para que la recta sea tangente a la circunferencia, esta distancia ha de ser igual al radio:

$$\frac{|k-4|}{\sqrt{2}} = 2 \rightarrow |k-4| = 2\sqrt{2} \begin{cases} k-4 = 2\sqrt{2} \rightarrow k = 4+2\sqrt{2} \\ k-4 = -2\sqrt{2} \rightarrow k = 4-2\sqrt{2} \end{cases}$$

Hay dos soluciones  $k_1 = 4+2\sqrt{2}$ ;  $k_2 = 4-2\sqrt{2}$

## Cónicas

### Ejercicio nº 21.-

Identifica estas cónicas, halla sus elementos y dibújalas:

a)  $\frac{x^2}{36} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$       b)  $y^2 - 4x = 0$

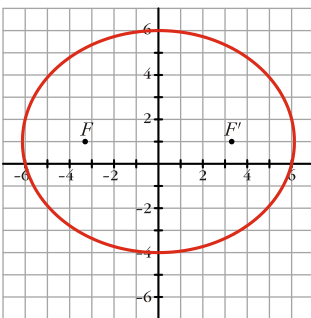
**Solución:**

a) Es una elipse de centro  $P(0, 1)$ .

Semieje mayor: 6; semieje menor: 5

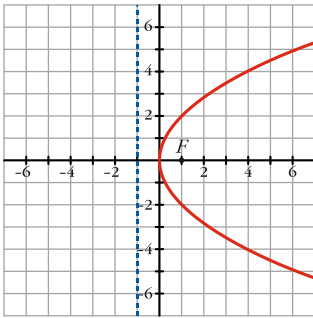
Focos:  $F(\sqrt{11}, 1)$  y  $F'(-\sqrt{11}, 1)$

Excentricidad  $\frac{\sqrt{11}}{6} \approx 0,55$



b)  $y^2 - 4x = 0 \rightarrow y^2 = 4x$

Es una parábola:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Vértice: } (0, 0) \\ \text{Foco: } (1, 0) \\ \text{Directriz: } x = -1 \end{array} \right.$



**Ejercicio nº 22.-**

Describe las siguientes cónicas, obtén sus elementos y represéntalas:

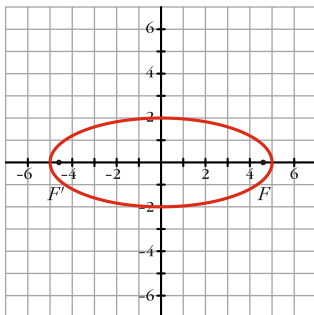
a)  $4x^2 + 25y^2 = 100$

b)  $4y^2 - x^2 = 4$

**Solución:**

a)  $4x^2 + 25y^2 = 100 \rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$

Es una elipse:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Semieje mayor: } 5 \\ \text{Semieje menor: } 2 \\ \text{Focos: } F(\sqrt{21}, 0) \text{ y } F'(-\sqrt{21}, 0) \\ \text{Excentricidad: } \frac{\sqrt{21}}{5} \approx 0,92 \end{array} \right.$

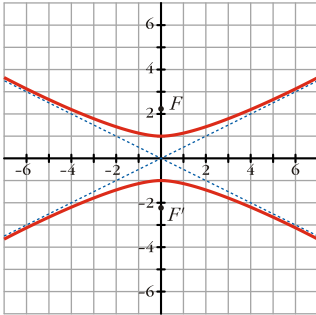


b)  $4y^2 - x^2 = 4 \rightarrow y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$



Es una hipérbola: {

- Semieje 1
- Focos:  $F(0, \sqrt{5})$  y  $F'(0, -\sqrt{5})$
- Excentricidad =  $\frac{\sqrt{5}}{1} \approx 2,24$
- Asíntotas:  $y = \frac{1}{2}x$ ;  $y = -\frac{1}{2}x$



**Ejercicio nº 23.-**

Identifica las siguientes cónicas, dibújalas y halla sus focos y su excentricidad:

a)  $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$       b)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1$

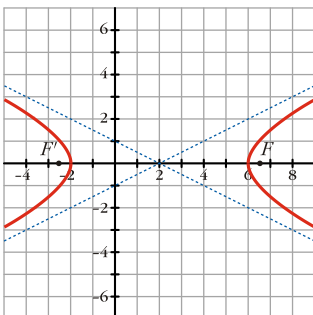
**Solución:**

a) Es una hipérbola de centro  $P(2, 0)$ .

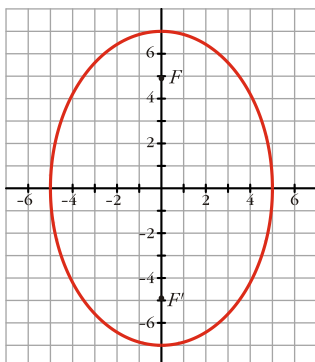
Los focos son:  $F(2+2\sqrt{5}, 0)$  y  $F'(2-2\sqrt{5}, 0)$

La excentricidad es:  $e = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,12$

Las asíntotas son:  $y = \frac{1}{2}(x-2)$ ;  $y = -\frac{1}{2}(x-2)$



- b)
- Es una elipse:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Semieje mayor: } 7 \\ \text{Semieje menor: } 5 \\ \text{Focos: } F(0, \sqrt{24}) \text{ y } F'(0, -\sqrt{24}) \\ \text{Excentricidad} = \frac{\sqrt{24}}{7} \approx 0,7 \end{array} \right.$



**Ejercicio nº 24.-**

Dadas las siguientes cónicas, identifícalas, obtén sus elementos característicos y represéntalas gráficamente:

a)  $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$       b)  $y^2 - 9x^2 = 9$

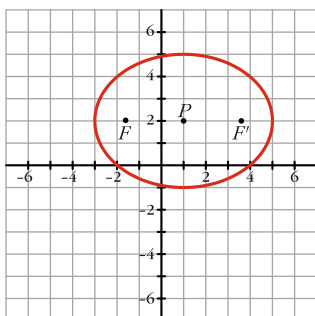
**Solución:**

a) Es una elipse de centro  $P(1, 2)$ .

Semieje mayor: 4; semieje menor: 3

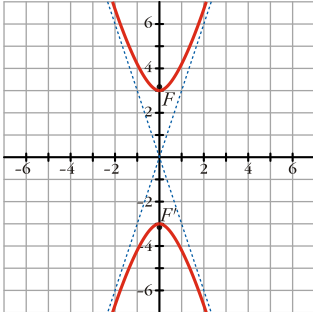
Focos:  $F(1+\sqrt{7}, 2)$  y  $F(1-\sqrt{7}, 2)$

Excentricidad  $\frac{\sqrt{7}}{4} \approx 0,66$



b)  $y^2 - 9x^2 = 9 \rightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{1} = 1$

Es una hipérbola {  
 Semieje 3  
 Focos:  $F(0, \sqrt{10})$  y  $F'(0, -\sqrt{10})$   
 Excentricidad =  $\frac{\sqrt{10}}{3} \approx 1,05$   
 Asíntotas:  $y = 3x$  ;  $y = -3x$



**Ejercicio nº 25.-**

Halla los elementos característicos de las siguientes cónicas, descríbelas y represéntalas gráficamente:

a)  $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$       b)  $25x^2 + 100y^2 = 2500$

**Solución:**

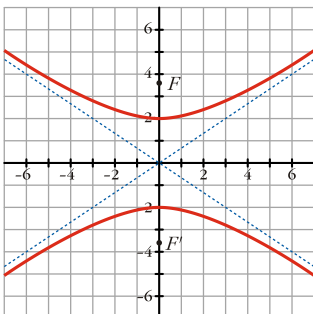
a) Es una hipérbola.

Semieje: 2

Focos:  $F(0, \sqrt{13})$  y  $F'(0, -\sqrt{13})$

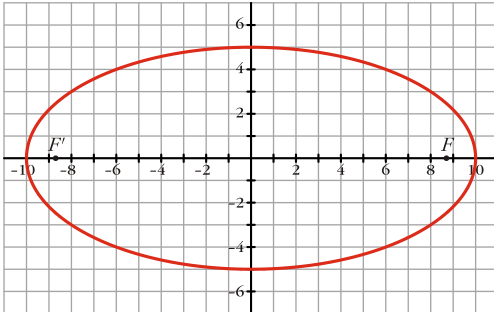
Excentricidad  $\frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1,8$

Asíntotas  $y = \frac{2}{3}x$  ;  $y = -\frac{2}{3}x$



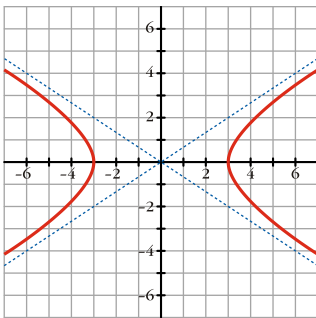
b)  $25x^2 + 100y^2 = 2500 \rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$

$$\text{Es una elipse: } \begin{cases} \text{Semieje mayor: } 10; \text{ semieje menor: } 5 \\ \text{Focos: } F(5\sqrt{3}, 0) \text{ y } F'(-5\sqrt{3}, 0) \\ \text{Excentricidad: } \frac{5\sqrt{3}}{10} \approx 0,87 \end{cases}$$



**Ejercicio nº 26.-**

Escribe la ecuación de la siguiente hipérbola y halla sus semieje, sus focos, su excentricidad y sus asíntotas:



**Solución:**

Ecuación  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

Semieje: 3

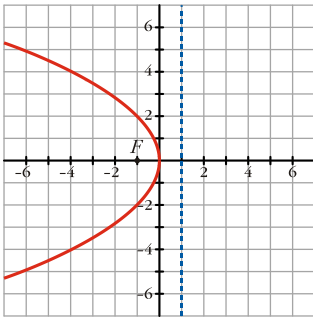
Focos:  $F(\sqrt{13}, 0)$  y  $F'(-\sqrt{13}, 0)$

Excentricidad  $\frac{\sqrt{13}}{3} \approx 1,2$

Asíntotas  $y = \frac{2}{3}x$ ;  $y = -\frac{2}{3}x$

**Ejercicio nº 27.-**

Halla el foco, la directriz y la ecuación de la siguiente parábola:



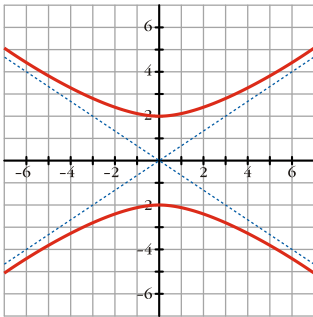
**Solución:**

Directriz:  $x = 1$ . Foco  $(-1, 0)$ .

Ecuación:  $y^2 = -4x$

**Ejercicio nº 28.**

Pon la ecuación de la siguiente hipérbola, su semieje, sus focos, su excentricidad y sus asíntotas:



**Solución:**

Ecuación  $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$

Semieje: 2

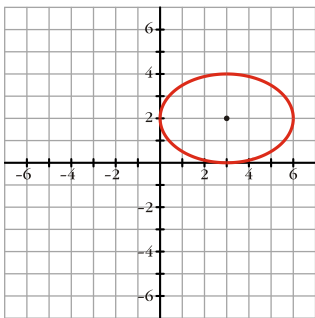
Focos:  $F(0, \sqrt{13})$  y  $F(0, -\sqrt{13})$

Excentricidad  $\frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1,8$

Asíntotas  $y = \frac{2}{3}x$ ;  $y = -\frac{2}{3}x$

**Ejercicio nº 29.-**

Escribe la ecuación de la siguiente elipse y halla sus semiejes, sus focos y su excentricidad:



**Solución:**

Ecuación  $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

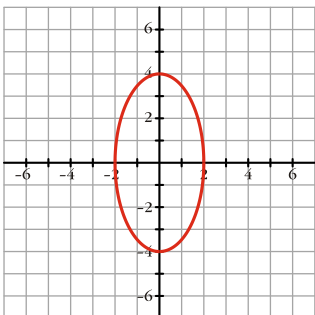
Semieje mayor: 3; semieje menor: 2

Focos:  $F(3+\sqrt{5}, 2)$  y  $F'(3-\sqrt{5}, 2)$

Excentricidad  $\frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0,75$

**Ejercicio nº 30.-**

Halla los semiejes, los focos y la excentricidad de la siguiente elipse. Escribe su ecuación:



**Solución:**

Semieje mayor: 4; semieje menor: 2

Focos:  $F(0, \sqrt{12})$  y  $F(0, -\sqrt{12})$

Excentricidad  $\frac{\sqrt{12}}{4} \approx 0,87$

Ecuación  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$